

Caratterizzazione delle oscillazioni elastiche di una molla

Oggetto della prova

Oggetto della prova è la misurazione del periodo di oscillazione di una molla utilizzando metodi di misura differenti. Si procederà, in una prima fase, nella misurazione dell'allungamento della molla con differenti pesi in modo da calcolare la costante elastica k , quindi alla misurazione dell'intervallo di tempo che intercorre ogni 5 oscillazioni (5 Hz) servendosi di un cronometro azionato manualmente ed infine si ripeterà quest'ultima misurazione servendosi di un sensore collegato ad un computer al fine di avere un andamento estremamente preciso dei valori di posizione del sistema massa/molla in oscillazione. Infine si procederà all'analisi dei risultati in base alla teoria della propagazione degli errori, in modo da avere un confronto tra l'accuratezza dei metodi di rilevazione diretti ed indiretti.

Cenni teorici

Come nella precedente esperienza – da cui si trae l'introduzione alla teoria degli errori –, l'obiettivo della misurazione del dato in questione non è propriamente quello di stabilire qual è il periodo di oscillazione di una molla – cosa confutabile abbastanza semplicemente utilizzando, come si è fatto in ultima istanza, un sistema computerizzato – ma è di controllare se le misurazioni effettuate sono congruenti e se sono statisticamente attendibili. Una misura infatti non ha senso se non se ne specifica il grado d'errore, dato vincolante per consentirne la riproducibilità, pilastro fondante della metodo sperimentale quindi della Fisica.

Semplificando, si parla di *errori sistematici* se essi sono trasversali a tutto l'esperimento (dovuti dall'uso di strumentazioni mal funzionanti, piuttosto che dall'allestimento sbagliato dell'esperimento stesso), di *errori casuali o accidentali* se sono dovuti all'imprecisione degli strumenti (che hanno sempre una sensibilità), oppure a quella umana (nel fermare un cronometro o nel leggere un valore su una scala analogica), oppure se dipendono da fattori non valutabili (cambio di pressione, umidità dell'aria, etc.); questi ultimi – a differenza dei primi che possono essere annullati o minimizzati – sono sempre presenti. L'approssimazione – come quella operata dal cronometro per discretizzare una variabile in realtà continua, quale è il tempo – contribuisce ulteriormente all'inesattezza (comunque contenuta) del risultato complessivo.

Per l'analisi dei dati ottenuti in fase sperimentale – tralasciando le dimostrazioni già analizzate nella lezione propedeutica all'esperienza – si sono utilizzate le conoscenze sul moto armonico, da cui si ricava la formula di determinazione del periodo.

Riguardo alla teoria della propagazione degli errori ci si è basati sulla relazione fondamentale che lega, nelle misurazioni indirette, il grado di errore del risultato $z = f(x,y)$ al grado di errore delle misurazioni dirette utilizzate per il calcolo di z , ovvero x e y .

$$\left| \frac{\varepsilon(z)}{\bar{z}} \right| \leq \left| \frac{\varepsilon(x)}{\bar{x}} \right| + \left| \frac{\varepsilon(y)}{\bar{y}} \right|$$

Misure ed elaborazione dati

Per lo svolgimento della prova il gruppo si è servito dei seguenti strumenti:

- Aste di supporto (*vedi schema*);
- molla;
- masse di varie pezzature;
- righello millimetrico o carta millimetrata;
- cronometro (sensibilità: centesima parte di secondo);
- sensore di prossimità e relativi interfaccia e software;
- computer per l'elaborazione e la raccolta di dati.

Misura indiretta: allungamento della molla in funzione della massa

Per ricavare la costante elastica della molla oggetto d'esame ne si rileva l'allungamento sotto l'azione di differenti forze peso sapendo che:

$$k = \frac{\Delta m \cdot g}{\Delta x}$$

Per questo esperimento sono state utilizzate sette masse (sei delle quali "assemblabili" in modo da costituire un'unica entità la cui massa sia la somma delle componenti).

Si procede, individuato un punto di riferimento nel sistema massa/molla, nel registrare l'allungamento della molla stessa servendosi di un foglio di carta millimetrata fissato sull'asta di sostegno.

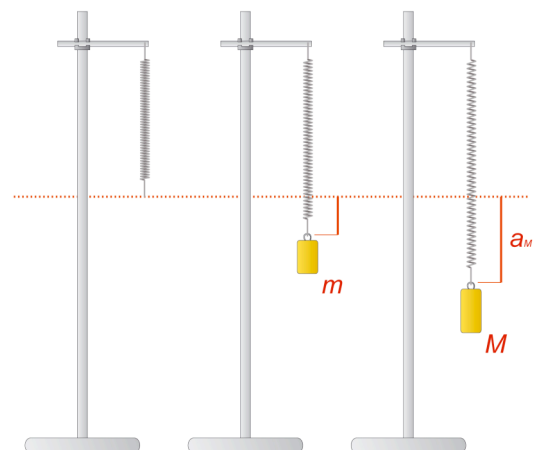
Ne ricaviamo quindi i valori di allungamento di k , basandoci sulla differenza di allungamento provocata da un incremento della massa, ed il corrispettivo errore relativo basato sulla sensibilità degli strumenti. Avendo una sensibilità strumentale di 0.001 Kg per la bilancia e 0.0001 m per la carta millimetrata/righello possiamo dedurre che:

$$\varepsilon(\Delta m) \cong \varepsilon(m_1) + \varepsilon(m_2) = 0,001Kg + 0,001Kg = 0,002Kg$$

$$\varepsilon(\Delta x) \cong \varepsilon(x_1) + \varepsilon(x_2) = 0,001m + 0,001m = 0,002m$$

Si procede dunque al calcolo dell'errore relativo applicando la formula:

$$\frac{\varepsilon(k)}{\bar{k}} \leq \frac{\varepsilon(\Delta m)}{(\Delta m)} + \frac{\varepsilon(\Delta x)}{(\Delta x)}$$



<i>Massa (m)</i>	<i>Allung. (x)</i>	Δm	Δx	<i>Cost. el. (\bar{k})</i>	<i>Err. (ε_k / \bar{k})</i>
0,178 Kg	0,053 m	-	-	-	-
0,051 Kg	0,015 m	0,127 Kg	0,038 m	32,786 N/m	0,068 N/m
0,102 Kg	0,029 m	0,051 Kg	0,014 m	35,736 N/m	0,182 N/m
0,153 Kg	0,043 m	0,051 Kg	0,014 m	35,736 N/m	0,182 N/m
0,204 Kg	0,058 m	0,051 Kg	0,015 m	33,354 N/m	0,173 N/m
0,254 Kg	0,072 m	0,050 Kg	0,014 m	35,036 N/m	0,183 N/m
0,304 Kg	0,087 m	0,050 Kg	0,015 m	32,700 N/M	0,173 N/m

Dalla media dei valori ottenuti risulta quindi:

Media (k'): 34,225 N/m

Errore relativo (ε_k / \bar{k}): 0,137 N/m

Andiamo dunque a calcolare, sulla base di questi ultimi risultati, il periodo (T) di oscillazione della massa scelta (0,178 Kg), per la successiva fase dell'esperimento, servendoci della relazione:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Utilizziamo i differenti valori di k ottenuti nelle misurazioni effettuate in precedenza per arrivare ad una più corretta determinazione del periodo:

<i>Massa (m)</i>	<i>Cost. el. (\bar{k})</i>	<i>Err. (ε_k / \bar{k})</i>	<i>Periodo (T)</i>
0,178 Kg	32,786 N/m	0,068 N/m	0,463 s
0,178 Kg	35,736 N/m	0,182 N/m	0,443 s
0,178 Kg	35,736 N/m	0,182 N/m	0,443 s
0,178 Kg	33,354 N/m	0,173 N/m	0,459 s
0,178 Kg	35,036 N/m	0,183 N/m	0,448 s
0,178 Kg	32,700 N/m	0,173 N/m	0,463 s

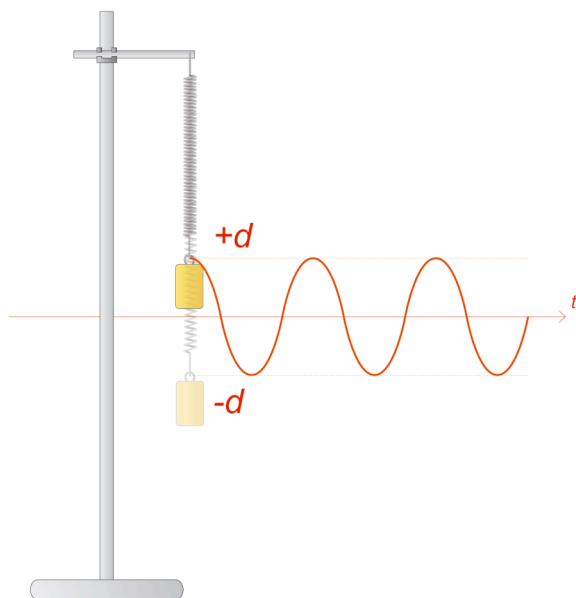
Quindi si ottiene che il periodo – con il relativo errore – è pari a:

Media del periodo (T): 0,453 s

Errore quadratico (σ_T): 0,010 s

Misura diretta: periodo di oscillazione della molla

In questa seconda fase si è proceduto nel misurare l'intervallo di tempo intercorso tra serie di 5 oscillazioni per un totale di 30 misurazioni (per un totale 150 oscillazioni del sistema).



n	t	T
1	2,56	0,51
2	2,50	0,50
3	1,83	0,37
4	1,88	0,38
5	2,25	0,45
6	1,94	0,39
7	1,94	0,39
8	1,88	0,38
9	1,83	0,37
10	1,83	0,37
11	1,83	0,37
12	1,83	0,37
13	1,83	0,37
14	1,94	0,39
15	2,06	0,41
16	2,00	0,40
17	2,25	0,45
18	2,12	0,42
19	1,94	0,39
20	1,75	0,35
21	1,94	0,39
22	1,69	0,34
23	2,06	0,41
24	1,69	0,34
25	1,75	0,35
26	1,88	0,38
27	1,88	0,38
28	2,00	0,40
29	2,00	0,40
30	1,75	0,35

Da tali valori – riportati nella tabella qui di lato (con T uguale alla quinta parte del valore t rilevato) – si ottiene la media del periodo di oscillazione T' , andando anche a calcolarne il relativo errore, basandosi sulla sensibilità dello strumento (al centesimo di secondo):

Media del periodo (t'):	1,95 s
Errore relativo ($\varepsilon_{t'}$):	0,01 s
Media del periodo (T'):	0,39 s
Errore relativo ($\varepsilon_{T'}$):	0,002 s

Confronto tra misura indiretta e misura diretta

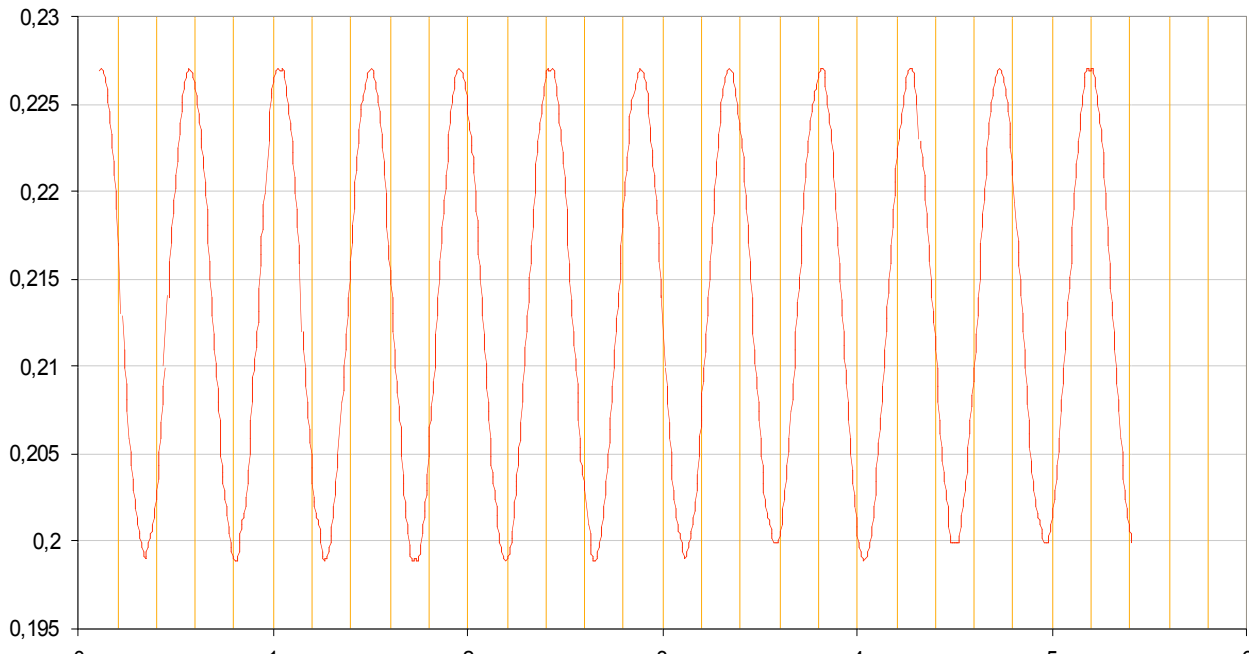
Procediamo dunque al confronto tra i valori del periodo calcolati nella misurazione indiretta e quelli rilevati nella misurazione diretta.

Misura indiretta		Misura diretta	
Stima periodo	0,453 s	Med.sing.per.	0,39 s
Errore	0,010 s	Errore	0,002 s

Le considerazioni finali sono riportate successivamente, in modo da consentire un confronto dei due risultati ottenuti con la misurazione per mezzo di un sensore elettronico.

Misura diretta per mezzo di un sensore elettronico

Per confutare la misurazione diretta effettuata a cronometro abbiamo proceduto all'uso di un sistema elettronico, che garantisce una maggior precisione dei risultati, riportando il grafico risultante dalla tabella distanza/tempo estrapolata dal sistema. Il range in considerazione è di 11,5 Hz.



Dai dati rilevati dal sensore risulta che il periodo di oscillazione del sistema molla/massa è mediamente di circa 0,45 secondi.

Estraendo dagli stessi dati (riportati sotto forma di tabella m/s) il grado di approssimazione dell'apparecchiatura utilizzata si evince che la sensibilità nel rilevamento della distanza è di 0,001 m e nel conteggio del tempo è di 0,0001 s. Detto ciò siamo dunque sicuri nell'affermare che la precisione della misura del periodo di oscillazione è del decimillesimo di secondo.

Commenti finali

Lo scopo della prova era anzitutto quello di stimare, mediante la misura diretta e indiretta, il periodo di oscillazione della molla, quindi passare al controllo della distribuzione degli errori e controllare in base a questi valori quanto il metodo di misura e gli strumenti influiscono sul risultato.

<i>Periodo ricavato graficamente</i>	<i>Periodo misura indiretta</i>	<i>Periodo misura diretta</i>
0,45 s	0,453 s	0,39 s

L'errore relativo al periodo ricavato dalla misurazione indiretta (0,010 s) è notevolmente maggiore rispetto a quello relativo al periodo ricavato dalla misurazione diretta (0,002 s). La spiegazione di questa discordanza risiede nel fatto che l'errore relativo alle misure indirette è stato calcolato basandosi su altri dati sperimentali di partenza – già essi stessi portatori di un certo grado di errore – che nel risultato finale si somma.

Merita considerazione anche la scelta degli strumenti oggetto della prova: se le misure fossero state effettuate con – ad esempio – un massa doppia rispetto a quella utilizzata nella misurazione indiretta l'errore sarebbe stato ridotto significativamente. Ciò è dovuto al fatto che tanto più il valore della sensibilità dello strumento si distanzia dal valore rilevato dallo strumento stesso e maggiore, in proporzione, sarà l'accuratezza della misurazione. L'uso di un peso medio (rispetto alla massa più grande a nostra disposizione) e di una molla con una considerevole forza elastica – da cui ne deriva un minor allungamento ed un periodo di oscillazione, sempre a parità di massa, minore – non ha dunque favorito l'esito positivo della prova.

Infine c'è da considerare un problema degli strumenti utilizzati: essendo la molla non perfetta, deficit al quale si aggiunge una seria difficoltà nel “caricare” correttamente il sistema per lo studio delle oscillazioni, la quasi totalità delle prove ha registrato un'oscillazione della molla anche sul piano verticale, il quale a sua volta roteava attorno al proprio asse.

Analizzando infine i grafici ottenuti dalle rilevazioni del sensore (prendendo in esame solo quelle parti dove la massa manteneva un'oscillazione vicina a quella ideale), possiamo notare che la curva ottenuta è approssimabile ad una sinusoidale, a conferma del fatto che il moto della molla è un moto armonico semplice.

In conclusione possiamo affermare che, nonostante la propagazione degli errori risulti di cinque volte maggiore nella misurazione indiretta, la misurazione diretta risulta molto distante dai dati forniti dal sensore elettronico – di gran lunga il sistema più preciso –, quindi è da considerarsi non accettabile ai fini dell'esperimento.

Questa maggior aderenza allo status quo del primo metodo di misura si può attribuire al fatto che i dati di partenza per tale sistema sono stati rilevati in maniera più precisa dall'operatore: infatti nella pesatura della massa e nella misurazione dell'allungamento della molla si ha avuto modo di controllare con precisione il valore riportato dallo strumento mentre – ciò vale invece per la misurazione diretta – cronometrando il tempo intercorso tra 5 oscillazioni – dovendo lavorare su periodi di poco più di due secondi e senza avere un'indicazione precisa di quando la massa ritornasse al punto 0 – gli errori di rilievo sono aumentati enormemente.

I risultati dell'esperimento sono giudicati comunque accettabili dal gruppo di lavoro, abbastanza convinte del fatto che, con gli strumenti a nostra disposizione, non si possano raggiungere risultati di molto migliori di quelli riscontrati in fase sperimentale.