

Distribuzione statistica delle misure del periodo di un pendolo semplice

Oggetto della prova

Oggetto della prova è la misurazione del periodo di oscillazione di un pendolo semplice con la conseguente distribuzione degli errori di misura allo scopo di verificarne l'andamento secondo la legge normale.

Per l'esperimento sono state effettuate tre serie di misure del periodo, con un numero di dati crescenti (30, 100 e 300 prove), sulla base delle quali si sono state determinate le medie, le distribuzioni ed i parametri statistici richiesti.

Cenni teorici

L'obiettivo della misurazione del dato in questione non è propriamente quello di stabilire qual è il periodo di oscillazione di un pendolo semplice ma è di controllare se le misurazioni effettuate sono congruenti e se sono – statisticamente – attendibili. Una misura infatti non ha senso se non se ne specifica il grado d'errore, dato vincolante per consentirne la riproducibilità, pilastro fondante della metodo sperimentale quindi della Fisica.

Si può giungere infatti al risultato (la determinazione del periodo) facendo una semplice media dei valori rilevati. Tale media però non tiene conto degli errori che possono aver falsato il risultato.

Semplificando, si parla di *errori sistematici* se essi sono trasversali a tutto l'esperimento (dovuti dall'uso di strumentazioni mal funzionanti, piuttosto che dall'allestimento sbagliato dell'esperimento stesso), di *errori casuali o accidentali* se sono dovuti all'imprecisione degli strumenti (che hanno sempre una sensibilità), oppure a quella umana (nel fermare un cronometro o nel leggere un valore su una scala analogica), oppure se dipendono da fattori non valutabili (cambio di pressione, umidità dell'aria, etc.); questi ultimi – a differenza dei primi che possono essere annullati o minimizzati – sono sempre presenti. L'approssimazione – come quella operata dal cronometro per discretizzare una variabile in realtà continua, quale è il tempo – contribuisce ulteriormente all'inesattezza (comunque contenuta) del risultato complessivo.

Per la confutazione dei dati ottenuti in fase sperimentale – omettendo i passaggi matematici, noti e reperibili su un qualsiasi manuale di Analisi I –, si procede al confronto tra la frequenza con cui ognuno dei diversi valori rilevati si presenta con la curva di Gauss. Quest'ultima indica come la frequenza con cui un valore si deve presentare è minore tanto maggiore è la distanza dal valore media di tutti i valori ottenuti. Dal confronto di questi due grafici siamo quindi in grado di rilevare eventuali errori, più o meno marcati, nella fase di sperimentazione.

Misure ed elaborazione dati

Per lo svolgimento della prova il gruppo si è servito dei seguenti strumenti:

- pendolo semplice (*vedi schema*);
- riga millimetrica;
- cronometro (sensibilità: centesima parte di secondo);
- computer per l'elaborazione dei dati raccolti.

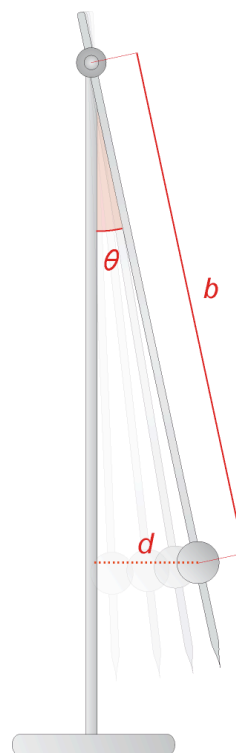
Per operare in un sistema in cui la forza di richiamo del pendolo in moto sia uguale ed opposta allo spostamento stesso – condizione che garantisce un'oscillazione pressoché costante nel tempo – bisogna porsi nella condizione delle piccole oscillazioni; ciò prevede che l'angolo massimo formato dal pendolo con l'asse sia minore di 15° .

Considerando il peso come riferimento e conoscendo la sua distanza d dalla cerniera del sistema si può ricavare facilmente per quale valore di d (distanza massima del peso dall'asse di oscillazione, nonché posizione di partenza del pendolo) l'angolo θ sia minore 15° .

$$b = 95\text{cm}$$

$$\theta = 14^\circ$$

$$d = b \sin \theta \approx 20,7\text{cm}$$



Preso tale valore di d come base per le tre serie di misurazioni si è proceduto all'esperimento, utilizzando la posizione di partenza come riferimento per la misurazione del periodo di oscillazione del pendolo.

Prova con 30 misurazioni

Di seguito sono riportati i valori rilevati con il numero di volte in cui essi sono comparsi nelle misurazioni, quindi la loro frequenza in percentuale.

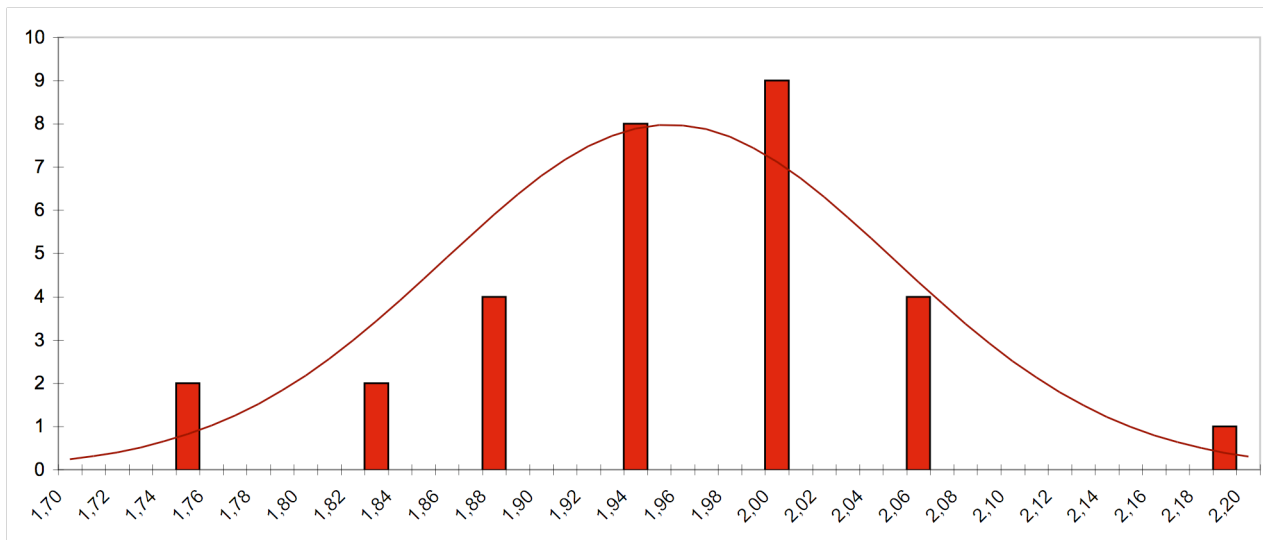
Valore	Numero di eventi	Frequenza (f %)
1,75	2	6,67 %
1,83	2	6,67 %
1,88	4	13,33 %
1,94	8	26,67 %
2,00	9	30,00 %
2,06	4	13,33 %
2,19	1	3,33 %

Dei dati raccolti andiamo quindi a ricavare:

Media (\bar{x}): 1,95 sec
 Varianza (S^2): 0,00917 sec
 Scarto quadratico medio (sqm): 0,0958 sec
 Moda della distribuzione: 2,00 sec

Non vi sono valori esterni all'intervallo $\bar{x} - 3 \cdot sqm \div \bar{x} + 3 \cdot sqm$ (quindi 1,67 ÷ 2,24).

Riportiamo quindi l'istogramma della frequenza con cui i valori si sono ripresentati nelle misurazioni effettuate. L'ampiezza del canale è pari alla sensibilità dello strumento utilizzato, pari a 0,01 secondi. A tale grafico è sovrapposta la curva di Gauss normalizzata.



Osservazioni

Il numero ridotto delle misurazioni rende la distribuzione dei valori abbastanza dissimile da quello previsto dalla curva di Gauss. Ciò nonostante si nota la concentrazione attorno al valor medio dei dati e si ritrova già una distribuzione simmetrica di tali rilevazioni.

Prova con 100 misurazioni

Di seguito sono riportati i valori rilevati con il numero di volte in cui essi sono comparsi nelle misurazioni, quindi la loro frequenza in percentuale.

Valore	Numero di eventi	Frequenza (f%)
1,70	1	1,01 %
1,75	4	4,04 %
1,83	9	9,09 %
1,88	18	18,18 %
1,94	15	15,15 %
2,00	25	25,25 %
2,06	10	10,10 %

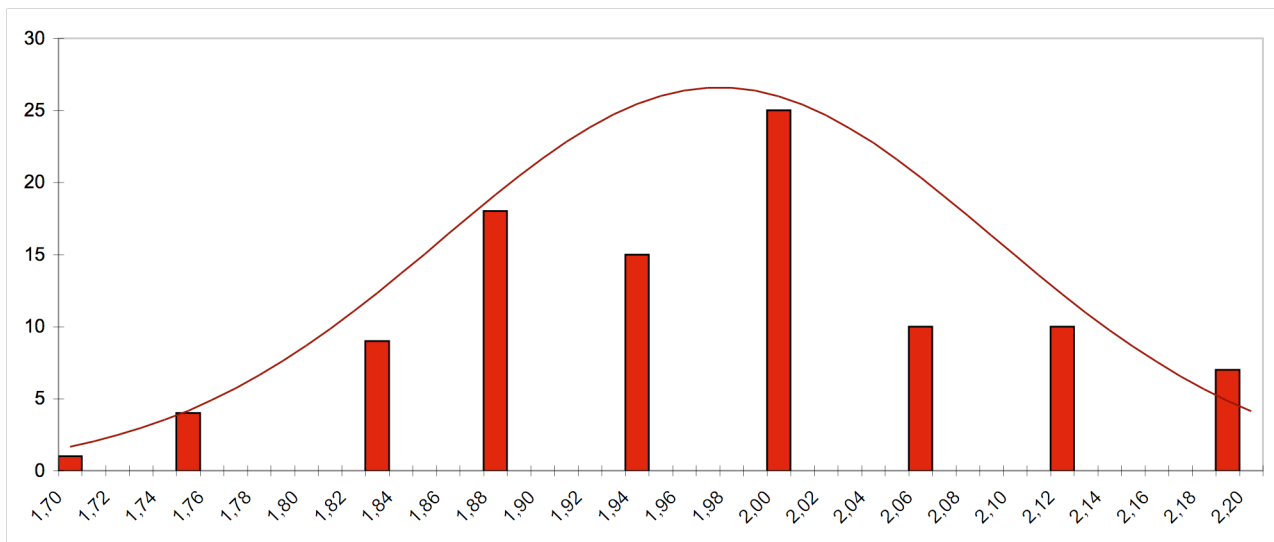
2,12	10	10,10 %
2,19	7	7,07 %

Dei dati raccolti andiamo quindi a ricavare:

Media (\bar{x}): 1,97 sec
 Varianza (S^2): 0,01362 sec
 Scarto quadratico medio (sqm): 0,1167 sec
 Moda della distribuzione: 2,00 sec

Non vi sono valori esterni all'intervallo $\bar{x} - 3 \cdot sqm \div \bar{x} + 3 \cdot sqm$ (quindi 1,62 ÷ 2,32).

Riportiamo quindi l'istogramma della frequenza con cui i valori si sono ripresentati nelle misurazioni effettuate come per la serie precedente.



Osservazioni

Questa seconda serie – nonostante sia più che triplicato il numero di misurazioni rispetto alla prima – presenta una simmetria meno accentuata ed una minor concentrazione dei dati attorno al valor medio.

Prova con 300 misurazioni

Di seguito sono riportati i valori rilevati con il numero di volte in cui essi sono comparsi nelle misurazioni, quindi la loro frequenza in percentuale.

Valore	Numero di eventi	Frequenza (f%)
1,75	4	1,33 %
1,83	16	5,33 %
1,88	45	15,00 %
1,94	84	28,00 %

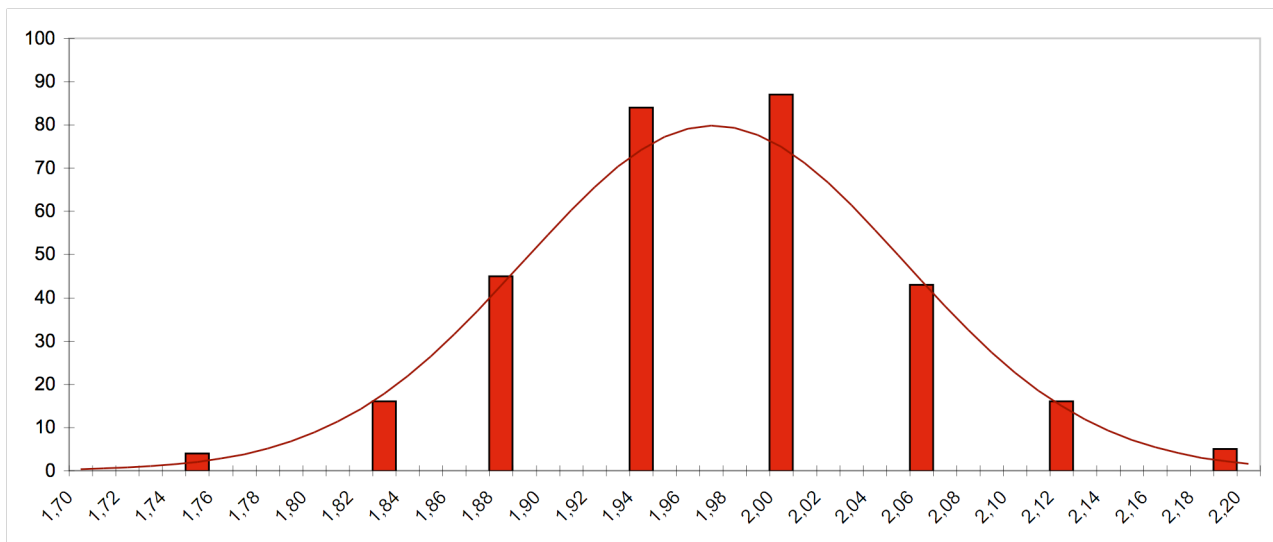
2,00	87	29,00 %
2,06	43	14,33 %
2,12	16	5,33 %
2,19	5	1,67 %

Dei dati raccolti andiamo quindi a ricavare:

Media (\bar{x}): 1,97 sec
 Varianza (S^2): 0,00663 sec
 Scarto quadratico medio (sqm): 0,0814 sec
 Moda della distribuzione: 2,00 sec

Non vi sono valori esterni all'intervallo $\bar{x} - 3 \cdot sqm \div \bar{x} + 3 \cdot sqm$ (quindi 1,73 ÷ 2,22).

Riportiamo quindi l'istogramma della frequenza con cui i valori si sono ripresentati nelle misurazioni effettuate come per le serie precedenti.



Osservazioni

La distribuzione dei dati in questa serie è – fatte le dovute premesse sugli strumenti utilizzati e sui componenti del gruppo di lavoro – probabilmente la migliore ottenibile in queste condizioni: simmetria attorno al valor medio rispettata appieno e concentrazione fedele all'andamento della gaussiana.

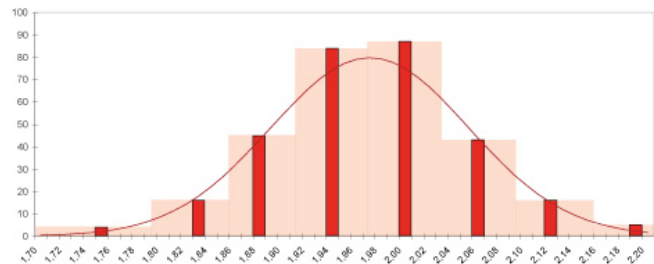
Commento finale

Va anzitutto evidenziata la presenza di un **rilevante** errore sistematico: il cronometro fornitoci per l'esperienza, nel totale delle 430 misurazioni effettuate nel *range* dei 1,5/2,5 secondi circa, ha registrato solamente 9 differenti valori dei possibili 100 (*si veda la prova con 100 misurazioni, in cui compaiono tutti*).

Tali particolari valori, distribuiti quasi omogeneamente nella rosa dei valori che il cronometro con precisione centesimale poteva fornire nel suddetto *range*, hanno comunque permesso di effettuare

l'esperimento – grazie proprio a questa distribuzione omogenea – lasciando però incompleti gli istogrammi e “gonfiando” – per approssimazione del cronometro attorno ai suddetti valori – le frequenze con le quali un determinato valore si ripresenta.

L'utilizzo di questi dati è certamente una forzatura, dato che caratteristica intrinseca della distribuzione dei valori secondo la legge di Gauss è che essi, per ogni valore rilevabile dallo strumento, seguano la curva.



Nel nostro caso però potremmo considerare lo strumento mal funzionante come uno strumento la cui sensibilità non sia della centesima parte del secondo ma circa della diciottesima (i valori di cui sopra non sono collocati ad intervalli fissi nella rosa dei valori ottenibili su scala centesimale), come illustrato nella figura qui a lato (bastata sulla serie da 300 misurazioni).

Dal punto di vista dell'analisi dei risultati (con il confronto dell'istogramma con la gaussiana) tale errore dello strumento non ha più permesso l'uso della normalizzazione classica della curva basata sulla sensibilità dello strumento (0,01) moltiplicata per il numero di misurazioni effettuate, ma ha imposto l'utilizzo di una normalizzazione sommaria, che nel nostro caso si basa sulla divisione dello *sqm* per un valore di 1,5, moltiplicato quindi per il numero di misurazioni effettuate.

Basandoci su quanto detto sopra possiamo trarre le seguenti conclusioni: le misurazioni si sono rivelate nel complesso precise, nonostante l'aumento degli errori casuali e sistematici nella serie con 100 misurazioni. Nell'ultima serie la precisione raggiunta è notevole, fatto che con molta probabilità si può in parte attribuire alla maggior pratica acquisita dai componenti del gruppo dopo aver portato a termine le misurazioni delle prime due serie.

È chiaramente evidente che all'aumentare del numero di prove effettuate l'istogramma si approssima alla curva di Gauss, ciò dimostra come i normali errori commessi in fase di sperimentazione – indipendenti l'uno dall'altro – tanto più è grande il numero di misurazioni tanto più si diluiscono all'interno del risultato finale, diventando quindi irrilevanti.

Senza dilungarsi ulteriormente possiamo dichiarare il successo di questa prova di verifica dell'andamento normale della distribuzione dei valori.