<u>Esame di Fisica con Laboratorio</u>

Corso di Laurea in Scienze dell'Architettura
Università degli Studi di Udine
29 gennaio 2010
Mario Paolo Giordani

<u>Soluzioni</u>

Teoria
Enunciare sinteticamente chiarendo il significato degli eventuali simboli utilizzati.

1. Definizione di momento di una forza.
Il momento $\boldsymbol{\tau}$ di una forza $\boldsymbol{F}$ è definito come $\boldsymbol{\tau} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$, dove $\boldsymbol{r}$ è la posizione del punto di applicazione della forza relativo a un polo. È buona norma scegliere il polo solidale con un sistema di riferimento inerziale o con il centro di massa.

2. Definizione di lavoro di una forza.
Il lavoro di una forza $\boldsymbol{F}$ è definito come $\mathrm{d}W \equiv \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, dove $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ è uno spostamento infinitesimo.

3. Secondo principio della dinamica.
La forza totale applicata a un sistema corrisponde alla variazione della quantità di moto del sistema nell'unità di tempo:

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$$

Quesiti a risposta chiusa
Selezionare tutte le risposte corrette.

4. Relativamente alla forza di attrito statico che si sviluppa fra superficie di contatto di un corpo e del piano inclinato su cui poggia, è sempre vero che il suo modulo:
☐ dipende dalla massa del corpo
☐ è proporzionale al modulo della forza peso del corpo
☐ è proporzionale al modulo della reazione vincolare del piano
☑ è superiormente limitato

5. Affinchè in un sistema si conservi il momento angolare è necessario che:
☐ la quantità di moto del sistema sia costante
☐ il sistema non ruoti
☐ il sistema sia isolato
☑ il momento delle forze applicate sia nullo

6. Il momento d'inerzia di un corpo rigido
☐ dipende unicamente dalle caratteristiche del corpo
☑ dipende, oltre che dalle caratteristiche del corpo, dall'asse di rotazione
☑ ha valore minimo per rotazioni attorno a un'asse passante per il centro di massa
☐ è una quantità vettoriale

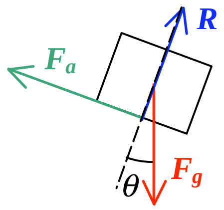
Esercizi

7. Un corpo puntiforme di massa m=2kg poggia su un piano inclinato di un angolo θ=30^o. Determinare:

1. il modulo della forza di attrito e
2. il valore minimo del coefficiente di attrito statico

affinchè il corpo rimanga in quiete.

Dal diagramma del corpo libero:



si evincono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} R - mg\cos\theta &= ma_{\perp} = 0 \\ -F_a + mg\sin\theta &= ma_{\parallel} = ma \end{aligned};$$

dovendo essere a=0, si trova:

$$\begin{aligned} R &= mg\cos\theta \\ mg\sin\theta = F_a &\le \mu_s R = \mu_s mg\cos\theta \end{aligned}.$$

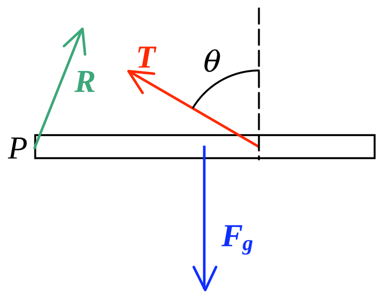
Dunque:

$$\begin{aligned} F_a &= mg\sin\theta \simeq 2\text{kg}\cdot 9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}\cdot\sin 30^0 \simeq 9.8\text{N} \\ \mu_s &\ge \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \tan 30^0 \simeq 0.57 \end{aligned}.$$

8. L'estremità di una trave orizzontale omogenea di sezione uniforme di massa m=3kg e lunghezza l=3m è incernierata a un supporto verticale per mezzo di un perno liscio; la stabilità della trave è garantita da una fune ideale che, agganciata all'asta a distanza $^2/_3 l$ dal perno, forma con il supporto verticale un angolo di 60^o. Determinare:

1. la reazione vincolare esercitata dal perno;
2. la tensione della fune.

Dal diagramma di corpo libero:



si determinano le relazioni:

$$\begin{gathered}R_y + T\cos\theta - mg = ma_y = 0 \\ R_x - T\sin\theta = ma_x = 0 \\ mg\frac{l}{2} - T\cos\theta\frac{2}{3}l = I_P\alpha = 0\end{gathered} \quad .$$

Dall'ultima si determina immediatamente la tensione:

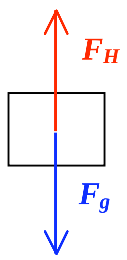
$$T = \frac{3}{4}mg\frac{1}{\cos\theta} \simeq \frac{3}{4}\cdot 3\mathrm{kg}\cdot 9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\frac{1}{\cos 60^\circ} \simeq 44\mathrm{N}$$

e da questa si trovano le componenti della reazione vincolare:

$$R_y = mg - T\cos\theta = mg - \frac{3}{4}mg = \frac{1}{4}mg \simeq \frac{1}{4}\cdot 3\mathrm{kg}\cdot 9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} \simeq 7.35\mathrm{N}$$
$$R_x = T\sin\theta = \frac{3}{4}mg\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}mg\tan\theta = \frac{3}{4}\cdot 3\mathrm{kg}\cdot 9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\tan 60^\circ \simeq 38\mathrm{N}$$

9. Una molla ideale si allunga di 10cm sotto l'azione di una massa m=2kg per opera della forza di gravità in condizione di equilibrio. Il medesimo sistema molla-massa viene quindi adagiato su un piano orizzontale liscio, con l'estremità libera della molla vincolato a un supporto fisso. Spostata di 5cm dalla posizione di equilibrio, la massa viene quindi rilasciata. Determinare:
1. la costante elastica della molla;
2. la frequenza dell'oscillazione;
3. la velocità massima della massa.

Dalla considerazione del diagramma del corpo libero per il corpo di massa m:



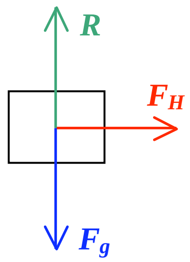
e facendo uso della definizione di forza di Hooke, si trova immediatamente che:

$$-k\Delta y - mg = F_H - mg = ma = 0\,,$$

da cui si determina il valore della costante elastica della molla:

$$k = -\frac{mg}{\Delta y} = -\frac{2\mathrm{kg}\cdot 9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{-10\mathrm{cm}\,\frac{1\mathrm{m}}{10^2\mathrm{cm}}} \simeq 2\cdot 10^2\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$$

(si noti come l'allungamento – procedendo verso il basso, direzione che si è arbitrariamente considerata negativa – sia negativo).
Considerato ora il diagramma del sistema molla-massa in posizione orizzontale sul piano liscio:



si trova che:

$$R - mg = ma_{\perp} = 0$$
$$-kx = F_H = ma_{\parallel} = ma = m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

in cui si è indicato con x lo spostamento dalla posizione di equilibrio del sistema; in particolare la seconda equazione (che costituisce l'equazione del moto per il sistema):

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k}{m}x$$

descrive un moto armonico semplice di pulsazione:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e dunque di frequenza:

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg}{m\Delta y}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta y}} \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{9.8\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{10\mathrm{cm}\,\frac{1\mathrm{m}}{10^2\mathrm{cm}}}} \simeq 1.6\mathrm{Hz}$$

Noto che la soluzione generale dell'equazione del moto è del tipo:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

la velocità della massa all'istante di tempo t è dato da:

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

da cui si evince che la velocità massima (in modulo) sia:

$$v_{max} = A\omega_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}} \simeq 5\text{cm}\,\frac{1\text{m}}{10^2\text{cm}} \cdot \sqrt{\frac{9.8\text{m}\cdot\text{s}^{-2}}{10\text{cm}\,\frac{1\text{m}}{10^2\text{cm}}}} \simeq 0.5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

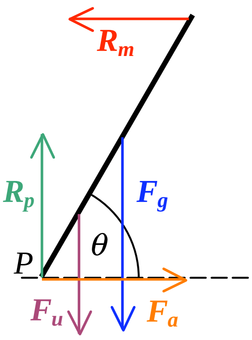
10. Una scala di lunghezza l=2m e di massa m=10kg (assimilabile a un corpo rigido omogeneo di spessore trascurabile) è appoggiata a una parete verticale liscia e a un pavimento orizzontale in modo da formare con quest'ultimo un angolo di 60°; il coefficiente di attrito statico fra scala e pavimento è pari a μ_s=0.2. Una persona (assimilabile a un punto materiale) di massa M=70kg si arrampica sulla scala. Determinare:

1. fino a quale altezza riesce ad arrampicarsi la persona senza che la scala scivoli.

In tale situazione, determinare:

2. la reazione vincolare del pavimento;
3. la reazione vincolare della parete.

Dal diagramma di corpo libero per la scala:



in cui si è indicata con $\mathbf{F_u}=M\mathbf{g}$ *la forza esercitata dalla persona sulla scala, si trova:*

$$\begin{aligned} R_p - Mg - mg = ma_x = 0 \\ -R_m + F_a = ma_y = 0 \\ Mgfl\cos\theta + mg\frac{l}{2}\cos\theta - R_m l\sin\theta = I_P\alpha = 0 \end{aligned} \quad .$$

Il parametro f (incognito) ha valori compresi fra 0 e 1 e indica la frazione di scala salita dalla persona. Dalle precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned} R_p &= (M+m)g \\ R_m &= F_a\left[\le \mu_s R_p = \mu_s(M+m)g\right] \end{aligned} \quad ,$$

$$f = \frac{R_m}{Mg}\tan\theta - \frac{m}{2M} = \frac{F_a}{Mg}\tan\theta - \frac{m}{2M} \le \frac{\mu_s(M+m)}{M}\tan\theta - \frac{m}{2M} = \frac{2\mu_s(M+m)\tan\theta - m}{2M}$$

per cui:

$$f \le \frac{2\mu_s(M+m)\tan\theta - m}{2M} = \frac{2\cdot 0.2\cdot(70\text{kg}+10\text{kg})\tan 60^\circ - 10\text{kg}}{2\cdot 70\text{kg}} \simeq 0.32\,.$$

Dunque la persona riuscirà a salire la scala fino a un'altezza di:

$$h = fl\cos\theta \simeq 0.32 \cdot 2\mathrm{m} \cdot \cos 60^\circ \simeq 0.32\mathrm{m}$$

senza rischiare di farla scivolare. In questa situazione, la reazione vincolare del pavimento ha componenti:

$$R_p = (M+m)g \simeq (70\mathrm{kg}+10\mathrm{kg}) \cdot 9.8\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \simeq 7.8 \cdot 10^2\mathrm{N}$$
$$F_a = \mu_s (M+m)g \simeq 0.2 \cdot (70\mathrm{kg}+10\mathrm{kg}) \cdot 9.8\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} \simeq 1.6 \cdot 10^2\mathrm{N}$$

(dunque ha modulo pari a $\sqrt{R_p^2 + F_a^2} \simeq (M+m)g\sqrt{1+\mu_s^2} \simeq 8.0 \cdot 10^2\mathrm{N}$*), mentre la reazione della parete – essendo liscia – ha solo la componente orizzontale:*

$$R_m = F_a = \mu_s (M+m)g \simeq 1.6 \cdot 10^2\mathrm{N}\,.$$