.....................- Matematica 1 - 28/11/2007

COGNOME E NOME ....

N. di matricola .... **FIRMA**.....................

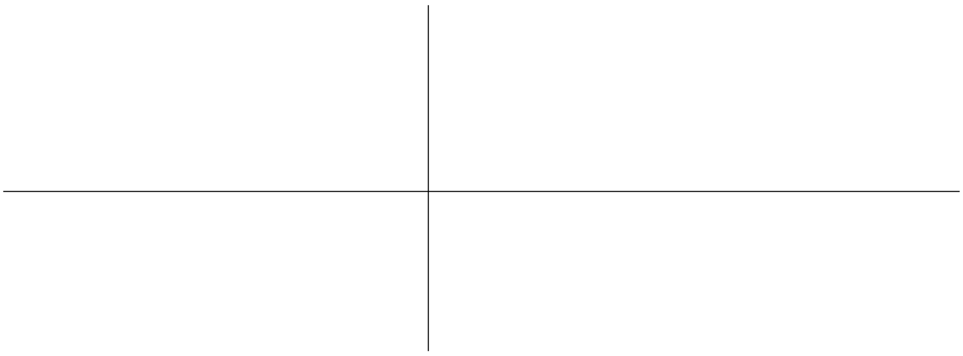
1. Determinare l'equazione della retta tangente il grafico della funzione $g(x) = \arctan(\ln x^2 - 1)$ nel punto $x_0 = 1$.

   4/30

2. (a) Disegnare in un sistema di riferimento cartesiano l'insieme

$$\Sigma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x - y)(x^2 + y^2 - 1)^2 + (xy - x^3)^4 = 0\}$$

   4/30

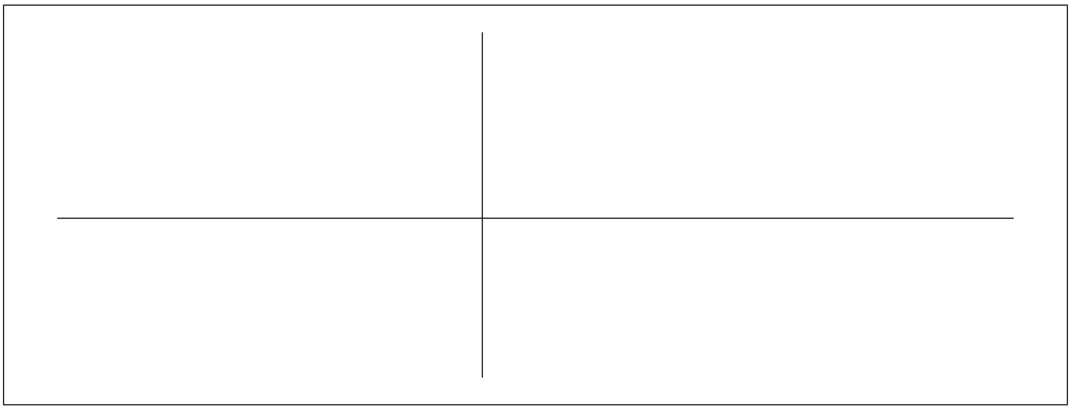


3. È data la funzione reale di variabile reale f definita da

$$f(x) = \ln \frac{x - 1}{x}.$$

   Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, monotonia.

   8/30



4. Calcolare $I = \int \frac{x^3-3x^2+5x+2}{x^2+1} dx$.

   8/30

   $I =$

5. Calcolare $L = \lim_{x \to -\infty} x^2 e^x$.

   6/30

   $L =$

1^0 ESERCIZIO

Si ha $g'(x) = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{(\ln x^2-1)^2+1}$, quindi $g'(1) = 1$ l'equazione della retta richiesta é $y = g(1) + g'(1)(x-1) = \frac{-\pi}{4} + (x-1)$.

2^0 ESERCIZIO

(a) Σ_0 é costituito dall'intersezione dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario e dai punti della retta $y = 0$ ossia i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$ oppure dall'intersezione dei punti della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario e la parabola $y = x^2$.

3^0 ESERCIZIO Il dominio è $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x} > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 1\}$. La funzione risulta essere positiva quando $\frac{x-1}{x} > 1$ cioé per $\frac{x-1}{x} - 1 > 0$ vale a dire $\frac{x-1-x}{x} > 0$, quindi moltiplicando per -1 si ottiene $\frac{1}{x} < 0$, in altri termini $x < 0$. La derivata prima é pari a $y' = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x(x-1)}$ Pertanto la funzione é sempre crescente. Inoltre $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$.

4^0 ESERCIZIO Siccome il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore procediamo alla divisione tra polinomi e si ottiene $x^3-3x^2+5x+2 = (x-3)(x^2+1)+4x+5$. Perció $I = \int \frac{(x-3)(x^2+1)}{x^2+1}dx + \int \frac{4x+5}{x^2+1}dx = \int (x-3)dx + 2\int \frac{2x}{x^2+1}dx + 5\int \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 2\ln(x^2+1) + 5\arctan x + c$.

5^0 ESERCIZIO

Il limite in questione vale 0. Infatti $x^2e^x = \frac{x^2}{e^{-x}}$. Applicando l'Hopital due volte si ottiene $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$.