

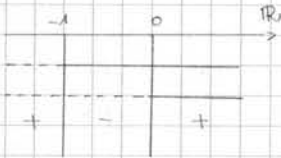
$$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{x}$$

(1) determinare l'insieme di definizione ( $D_f$ ) della funzione  $y = (x+1)\sqrt[3]{x}$   
 la funzione risulta essere definita su tutto  $\mathbb{R}$ ,  
 $x \in \mathbb{R}$  insieme dei numeri reali

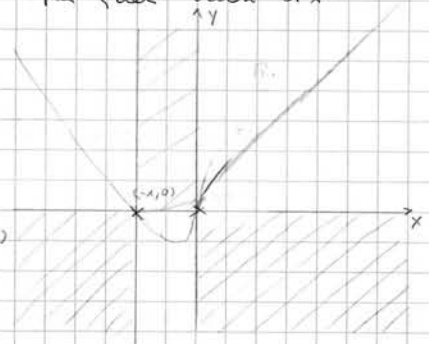
(2) determinare il segno della funzione  $f(x)$ , determinare per quali valori di  $x$   
 $f(x) > 0$  e per quali  $f(x) < 0$

$$(x+1)\sqrt[3]{x} > 0$$

$$\begin{aligned} x+1 > 0 & \text{ per } x > -1 \\ \sqrt[3]{x} > 0 & \text{ per } x > 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) > 0 & \text{ in } (-\infty, -1) \text{ e } (0, +\infty) \\ f(x) < 0 & \text{ in } (-1, 0) \end{aligned}$$



(3) determinare eventuali intersezioni con gli assi

$$\cap x \quad \begin{cases} y=0 \\ (x+1)\sqrt[3]{x}=0 \end{cases} \quad (x+1)\sqrt[3]{x}=0 \iff \begin{cases} (x+1)=0 \\ \sqrt[3]{x}=0 \end{cases} \quad \begin{aligned} & \vee \\ & x=-1 \\ & x=0 \end{aligned}$$

punti di intersezione con l'asse  $x$   $A=(-1,0)$   
 $O=(0,0)$

$$\cap y \quad \begin{cases} x=0 \\ (x+1)\sqrt[3]{x}=0 \end{cases} \quad O(0,0)$$

(4) per verificare se la funzione presenta particolari simmetrie unitarie  
 se la funzione è pari o dispari:

$$f(-x) = (-x+1)\sqrt[3]{-x} = (-x+1)\sqrt[3]{-x}$$

la funzione risulta essere  
 né pari né dispari, pertanto  
 non presenta particolari simmetrie

(5) studio il comportamento della funzione a  $+\infty$  e  $-\infty$  per capire  
 l'andamento della funzione agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)\sqrt[3]{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1)\sqrt[3]{x} = -\infty$$

la funzione non presenta asintoti orizzontali né asintoti verticali  
 unitari né ci sono asintoti obliqui del tipo  $y = ax + b$

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \text{no asintoto obliquo}$$

(6) calcolare derivate prime  $f'(x)$

$$f(x) = (x+1)\sqrt[3]{x} = (x+1)x^{1/3}$$

$$f'(x) = x^{1/3} + (x+1) \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

regole di prodotto

$$= \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(x) = 0$$

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{3} \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

$$f(x) = x^{4/3} + x^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{4}{3} x^{1/3} + \frac{1}{3} x^{-2/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} (4x^{1/3} + x^{-2/3}) =$$

$$= \frac{1}{3} x^{1/3} (4 + x^{-1})$$

$$y' = 0 \iff x^{1/3} = 0 \iff x = 0$$

$$4 + \frac{1}{x} = 0$$

$$4x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{4} = \text{min}$$

$$f\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-3}{4 \cdot 2^{2/3}} \approx -0.67$$

$$f''(x) = \frac{2}{3} \frac{(-1+x)}{x^{5/3}}$$

(2)  $\int_0^{\infty} e^x \sin x \, dx$

INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int f(x) g'(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx$$

$$\int_0^{\infty} e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$$

integro per parti: 1 volta  $\begin{cases} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x & g(x) = -\cos x \end{cases}$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

integro per parti:

$\begin{cases} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x & g(x) = \sin x \end{cases}$

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$2 \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

costante d'integrazione  
to t.c.  $C \in \mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} e^x \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^x \sin x \, dx = \lim_{b \rightarrow \infty} (e^b (\sin b - \cos b) - e^0 (\sin 0 - \cos 0)) =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} (e^b (\sin b - \cos b) + 1)$$

(4) sviluppare in serie (Maclaurin) la funzione  $f(x) = e^x$

serie di Maclaurin è un "caso particolare" della serie di Taylor (intate nelle serie di Maclaurin poro  $a=0$ )

Taylor  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a) (x-a)^n}{n!}$

Maclaurin  $\rightarrow$  poro  $a=0$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= e^x \end{aligned}$$

$$f(x) = e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

sviluppo in serie di Maclaurin della funzione  $e^x$

if  $a=0 \rightarrow f^{(n)}(a) = e^0 = 1$

Sviluppo in serie di Maclaurin di  $f(x) = (-x^3) e^{-x^2}$

considero lo sviluppo in serie di  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

l'argomento della funzione è  $(-x^2)$

stituisco alle serie  $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^{2n}}{n!}$$

per scrivere la funzione  $f(x)$   $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^3) (-x)^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^3 (-x)^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-x^{2n+3}}{n!}$

#