ESAME MATEMATICA 1

11 sett' 07

Es. 1: Data la funzione ed il suo grafico

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

sia $f''(x) = h(x)$

-> dominio di $h(x)$

$$D[h(x)] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \neq 0\}$$

-> verifico se la funzione è pari o dispari per determinare se esistono particolari simmetrie

$$h(-x) = -\frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{-x^3} = \frac{2}{x^3}$$

poichè $h(-x) = -h(x)$ risulta ~~essere~~ DISPARI => la funzione presente simmetria rispetto all' origine

-> $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} -\frac{2}{x^3} = -\infty$ ↳ Studio il comportamento della funzione $h(x)$ in 0^+ e 0^- (in 0 essa non risulta definita)

ASINTOTO VERTICALE $x=0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -\frac{2}{x^3} = +\infty$

studio il comportamento della funzione $h(x)$ a $+\infty$ e a $-\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{2}{x^3} = 0^-$

$\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{2}{x^3} = 0^+$

-> per determinare i punti stazionari calcolo la derivata prima della funzione $h(x)$, cioè $h'(x)$

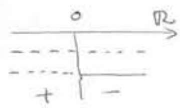
$h(x) = -2x^{-3}$

$h'(x) = 6x^{-4}$

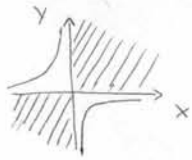
-> studio il segno della funzione $h(x)$

$h(x) \geq 0 \qquad -\frac{2}{x^3} \geq 0 \qquad N \geq 0 \quad -2 \geq 0 \quad$ mai

$D \geq 0 \quad x^3 > 0 \quad$ se $x > 0$



$h(x) \geq 0 \qquad \forall x < 0$



(a) calcolare $f'(x)$ e $f(x)$

poichè INTEGRAZIONE e DERIVAZIONE sono operazioni INVERSE per determinare $f'(x)$ devo

$$\int f''(x)\,dx = f'(x) + c$$

da cui $\int\left(-\frac{2}{x^3}\right)dx = -2\int(x^{-3})\,dx = -2 \cdot \frac{1}{-2}x^{-2} + c = x^{-2} + c$

$$\boxed{f'(x) = x^{-2}}$$

e $\int f'(x)\,dx = f(x)$

da cui $\int(x^{-2})\,dx = -1 \cdot x^{-1} + c = \frac{1}{x} + c$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$$

(b) Fare i grafici di $f'(x)$ e $f(x)$

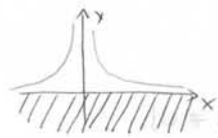
$f'(x) = \frac{1}{x^2}$ → dominio della funzione $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \neq 0\}$

→ segno della funzione

$\frac{1}{x^2} \geq 0$ $\quad N \geq 0 \quad 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$D \geq 0 \quad x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{x^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



→ la funzione non interseca gli assi

→ verifico se la funzione è pari o dispari per determinare se esistono particolari simmetrie

$\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$ da cui $f'(x) = f'(-x)$

la funzione è pari, quindi risulta simmetrica rispetto all'asse delle y

→ studio il comportamento della funzione in 0^+ e 0^-

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$

→ studio il comportamento della funzione agli estremi cioè in $+\infty$ e $-\infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$

→ determino la derivata prima della funzione data

$-\frac{2}{x^3}$

$f(x) = -\frac{1}{x}$ dominio $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$f(x) \geq 0 \quad -\frac{1}{x} \geq 0 \quad N \geq 0 \quad -1 \geq 0$ mai

$D \geq 0 \quad x \geq 0$

→ la funzione non interseca gli assi

→ determino se la funzione è pari o dispari

$f(-x) = -\frac{1}{(-x)} = +\frac{1}{x} = -f(x)$

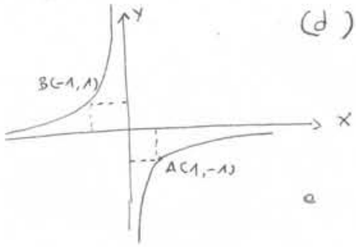
$f(-x) = -f(x)$ la funzione è dispari ⇒ presenta simmetria rispetto all'origine degli assi $O = (0,0)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$



(d) ASINTOTI :

$x=0$ ASINTOTO VERTICALE

$y=0$ ASINTOTO ORIZZONTALE

(c) continuità di $f(x)$

$f(x) = -\frac{1}{x}$ dominio della funzione $f(x)$ $D[f(x)] = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

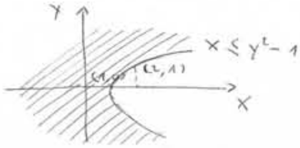
Es. 3

$$R = \begin{cases} y \geq \sqrt{x-1} & \text{I} \\ y \geq \sqrt{1-x} & \text{II} \\ y \leq x & \text{III} \\ x \leq 2 & \text{IV} \end{cases}$$

I $y \geq \sqrt{x-1}$ D di definizione $x \geq 1$

$y^2 \geq x-1$

$\boxed{x \leq y^2 - 1}$

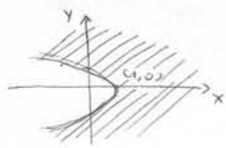


poiché $y \geq \sqrt{x-1}$
considero solo la parte
$y \geq 0$

II $y \geq \sqrt{1-x}$ D di definizione $x \leq 1$

$y^2 \geq 1-x$

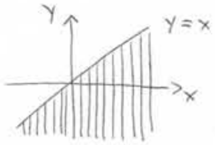
$\boxed{x \geq 1 - y^2}$



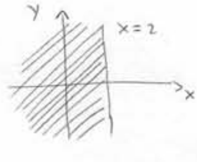
poiché $y \geq \sqrt{1-x}$
considero solo la parte
$y \geq 0$

III $\boxed{y \leq x}$

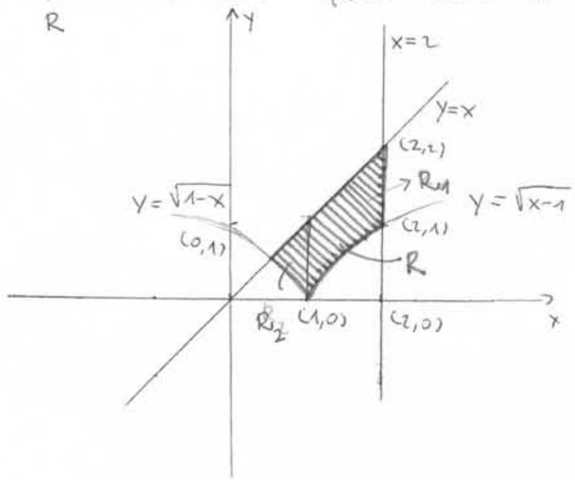
$y = x$ bisettrice 1°-3° quadrante



IV $x \leq 2$



(e) dopo aver fatto queste serie di considerazioni possiamo determinare
R



(b) calcolare l'area di R, possiamo considerare R come somma di R_1 e di R_2, da cui →

$R = R_1 + R_2$

$R_1 = \int_1^2 (x - \sqrt{x-1})\, dx$

$= \int_1^2 \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} \quad dx = \frac{5}{6}$

$=$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{3}$

$R_2 = \int_{??}^{1} x - \sqrt{1-x}\, dx$

$= \int_?^1 x\, dx - \int_?^1 (\sqrt{1-x})\, dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{x=?}^{x=1} -$

$\sqrt{1-x} = y$ $\sqrt{1-x} = x$
$x = y$ $1-x = x^2$ $x^2 -$

Es. 4

$$\boxed{f(x) = x \cdot e^{-x}}$$

OSS. $\rightsquigarrow$ || $f(x) = x e^{-x} \rightsquigarrow$ DERIVATA DEL PRODOTTO

$f(x) = g(x) h(x)$

$f'(x) = g'(x) h(x) + g(x) h'(x)$

Calcolo le derivate prime, seconde e terze per verificare il comportamento

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x) = -e^{-x}(-1+x)$

$f''(x) = e^{-x}(-2+x)$

$f'''(x) = -e^{-x}(-3+x)$

$f^{IV}(x) = e^{-x}(-4+x)$

$\vdots$

$f^{n}(x) = (-1)^{n}(-n+x)e^{-x}$ || dopo aver osservato il comportamento posso definire la $f^{n}(x)$

$$\boxed{f^{n}(x) = (-1)^{n} \cdot e^{-x}(x-n)}$$

derivata n-esima della funzione $f(x)$