Soluzioni Esame Scritto Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 28 giugno 2010

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 1 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ o i moduli $\boxed{1+2}$

(20 punti + 3 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Si disegni il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (10 punti)

Soluzione

Dominio: $x^2+1>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi $D(f)=\mathbb{R}$.

Segno: $\sqrt{y} \geq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, quindi $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Simmetrie: $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = f(x)$. Quindi f è pari.

Limiti agli estremi: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\sqrt{1+1/x^2} = +\infty$; infatti basta notare che se $x \to \infty$, allora $\sqrt{1+1/x^2} \to 1$.

Asintoti: Siccome il seguente limite esiste ed è finito: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = \lim_{x\to\pm\infty} |x|\sqrt{1+1/x^2}/x = \lim_{x\to\pm\infty} (\pm 1)\sqrt{1+1/x^2} = \pm 1$, si procede con il limite: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \mp x = \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{x^2+1} \mp x = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt{x^2+1} \mp x)\dfrac{\sqrt{x^2+1} \pm x}{\sqrt{x^2+1} \pm x} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+|x|} = \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+|x|} = 0$. Dunque gli asintoti esistono per $x \to \pm\infty$ ed hanno equazione $y = |x|$.

Derivata prima: $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ e dunque $f \nearrow$ (cresce) in $\{x > 0\}$, $f \searrow$ (decresce) in $\{x < 0\}$ e l'unico punto critico si trova in $x = 0$ ed è di minimo assoluto, ove $f(0) = 1$.

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt[3]{x^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, e dunque $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dunque $f \smile$ (è convessa) per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Il disegno è ora lasciato agli studenti.

2. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to x_0^+} g(x) = \lim_{x \to x_0^-} g(x) = c$. Si discuta la continuità di g al variare dei possibili x_0 e c per i quali i limiti hanno senso. (4 punti)

Soluzione

Si noti che i due limiti in questione sono valutati a destra e a sinistra di x_0, quindi si può escludere che $x_0 = +\infty$ e $x_0 = -\infty$, ossia si può affermare che $x_0 \in \mathbb{R}$. Inoltre, dalla teoria e dalle ipotesi vale che $\lim_{x \to x_0} g(x) = c$. Infine, g è continua in x_0 se e solo se $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.

Dunque, se $c \in \mathbb{R}$ e $c = g(x_0)$, allora g è continua in x_0, mentre se $g(x_0) \neq c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty,\ -\infty\}$, allora g non può essere continua in x_0.

3. Si calcoli

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{2x}. \qquad \text{(4 punti)}$$

Soluzione

Si noti che, dopo aver verificato le ipotesi, il limite in questione si può calcolare con il teorema di de L'hôpital.

Tuttavia qui lo calcoliamo utilizzando solamente i limiti notevoli e la teoria sui limiti, senza far uso del calcolo differenziale.

Riscriviamo il limite come segue: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{2}$.

Sappiamo che $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$. Inoltre, ponendo $\sin(x) = t$, da cui segue che $x \to 0 \Rightarrow t \to 0$, si ottiene $\lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin(x)} - 1}{\sin(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ (limite notevole).

Basta infine osservare che abbiamo a che fare con un prodotto i cui fattori hanno limiti finiti, e dunque il limite è dato dal prodotto dei limiti dei fattori, ossia $1 \cdot 1 \cdot 1/2 = 1/2$.

4. Si calcoli l'integrale indefinito, ossia tutte le primitive, della funzione

$$\psi(x) = (x + 1)(\cos(x + 2)); \qquad \text{(4 punti)}$$

si calcoli poi l'integrale definito $\int_{\pi/2}^{\pi} \psi(x)\, dx$. (1 punto)

Soluzione

La funzione è continua (la verifica è lasciata al lettore) e quindi integrabile, dunque si può procedere.

Ponendo preliminarmente $x+2=t$, si ottiene che $dx = dt$ e $x+1 = t-1$, da cui

$\int (x+1)(\cos(x+2))\,dx = \int (t-1)\cos t\,dt = \int t\cos t\,dt - \int \cos t\,dt$. (L'ultima uguaglianza è vera grazie alla linearità dell'integrale).

Ora si può procedere separatamente: $\int t\cos t\,dt$ è integrabile per parti, infatti vale $\int t\cos t\,dt = t\sin t - \int \sin t\,dt = t\sin t + \cos t + k$, inoltre (banalmente) vale che $-\int \cos t\,dt = -\sin t + k'$, e dunque l'integrale indefinito cercato è $t\sin t + \cos t - \sin t + c = (x+2)\sin(x+2) + \cos(x+2) - \sin(x+2) + c = (x+1)\sin(x+2) + \cos(x+2) + c$ $c \in \mathbb{R}$.

Ora l'integrale definito è immediatamente calcolabile come segue: $\int_{\pi/2}^{\pi} \psi(x)\,dx = [(x+1)\sin(x+2) + \cos(x+2)]_{\pi/2}^{\pi} = (\pi+1)\sin(\pi+2) + \cos(\pi+2) - (\pi/2+1)\sin(\pi/2+2) + \cos(\pi/2+2) = -(\pi+1)\sin 2 - \cos 2 - (\pi/2+1)\cos 2 - \sin 2 = -(\pi+2)\sin 2 - (\pi/2+2)\cos 2$.

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(1, f(1))$. (2 punti)

   Soluzione

   Innanzitutto vale $(1, f(1)) = (1, \sqrt{2}) = P \in \mathscr{G}(f)$ e $f'(1) = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$ (si veda la soluzione all'esercizio 1). Ora, l'equazione della retta tangente al punto P è data da $(y - f(1)) = f'(1)(x-1)$, ossia $y - \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-1)$, che si può riscrivere come $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Sia f come nell'esercizio 1, e sia $\varphi(x) = f(x) - 2$. Si dimostri che $\varphi(x)$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (5 punti)

   Soluzione

   Si osservi che $\varphi(1) = \sqrt{1^2+1} - 2 < 0$, $\varphi(2) = \sqrt{2^2+1} - 2 > 0$ e che $\varphi(x)$ è continua. Dunque uno zero per $\varphi(x)$ esiste, e possiamo affermare che tale zero lo si può cercare nell'intervallo $I_0 =]1, 2[$. Valutando φ nel punto medio di I_0, otteniamo $\varphi(3/2) = \sqrt{9/4+1} - 2 = \sqrt{13/4} - 2 < \sqrt{16/4} - 2 = 0$. Dunque il punto x cercato appartiene all'intervallo $I_1 =]3/2, 2[$.

   Di nuovo, si tratta ora di valutare φ in $7/4$, ossia nel punto medio di I_1: $\varphi(7/4) = \sqrt{49/16+1} - 2 = \sqrt{65/16} - 2 > \sqrt{64/16} - 2 = 0$. Dunque il punto x cercato appartiene all'intervallo $I_2 =]3/2, 7/4[$.

Si conclude che il punto medio di $I_2 =]3/2, 7/4[$, ossia $13/8$, approssima lo zero cercato con un errore minore di $|7/4 - 3/2| = 1/4 = 2^{-2}$.

7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$.

   (4 punti)

   Soluzione

   Dopo aver ricordato che il polinomio di Taylor $\mathscr{T}_{\varphi,3,1}$ cercato è dato da $\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!}\varphi^{(i)}(1)(x-1)^i$ e aver notato che φ è ottenuta da f sommando una costante, e quindi le derivate di φ coincidono con quelle di f, resta solo da valutare le derivate i–esime di φ in 1 fino ad $i = 3$: $\varphi(1) = \sqrt{2} - 2$; $\varphi'(x) = f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ e dunque $\varphi'(1) = 1/\sqrt{2}$; $\varphi''(x) = f''(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ e dunque $\varphi''(1) = 1/\sqrt[3]{2}$. Infine $\varphi'''(x) = f'''(x) = -\frac{3x}{\sqrt[5]{x^2+1}}$ e dunque in particolare $f'''(1) = -3/\sqrt[5]{2}$. Si conclude quindi che $\mathscr{T}_{f,3,1} = \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2}(x-1) + (x-1)^2/\sqrt[3]{2} - 3(x-1)^3/\sqrt[5]{2}$. Eventualmente, si possono sviluppare le potenze del binomio $(x-1)$ così da ottenere un polinomio in forma ridotta.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ MATEMATICA 2 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$

(10 punti + 5 punti bonus)

8. Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta data dalle equazioni $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$ e $s \subset \mathbb{R}^3$ la retta parametrizzata da $s(t) = (2, -1, 1) + t(-1, 1, -1)$. Si trovi

   (a) il punto $P \in \mathbb{R}^3$ tale che $\{P\} = r \cap s$; (1 punto)

   (b) un'equazione del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ tale che $r \subset \pi$ e $s \subset \pi$. (3 punti)

   Soluzione

   (a) Se $\{P\} = r \cap s$, allora, in particolare, $P = (2-t, -1+t, 1-t) \in s$ deve soddisfare

   $\begin{cases} 2 - t - 1 + t + 1 - t = 1 \\ 2(2-t) + 1 - t = 2, \end{cases}$ il che dà $t = 1$ e quindi $P = (1, 0, 0)$.

(b) Si può procedere calcolando un vettore **v** che definisce la direzione di r utilizzando i coefficienti delle equazioni di r:

$$\vec{v} = (1,1,1) \times (2,-1,0) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = (1,2,-3).$$

Ora, il vettore $\vec{w}$ associato all'equazione di π deve essere ortogonale a entrambi $\vec{v} = (1,2,-3)$ e $(-1,1,-1)$, e dunque

$$\vec{w} = (1,2,-3) \times (-1,1,-1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,4,3).$$

Possiamo ora concludere che l'equazione cercata è del tipo $x + 4y + 3z = c$, e dovendo essere $P \in \pi$, deve valere $1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 1 = c$, da cui segue che l'equazione cercata è $x + 4y + 3z = 1$.

9. È data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^4 + 4xy + y^4$.

   (a) Si dimostri che f è differenziabile. (2 punti)

   (b) Si calcolino i punti critici di f e si dica di che tipo sono. (4 punti)

Soluzione

(a) Le derivate parziali prime di f sono

$$f_x = 4x^3 + 4y \text{ e } f_y = 4y^3 + 4x.$$

Essendo f_x e f_y funzioni polinomiali, esse sono continue, e ciò dimostra che f è differenziabile. Bastava peraltro osservare che essendo f polinomiale, sono polinomiali anche le sue derivate parziali (senza bisogno di calcolarle), e quindi f è differenziabile.

(b) Il dominio di f è tutto il piano reale e f è differenziabile, dunque cerchiamo i punti critici semplicemente servendoci delle derivate parziali calcolate nella risposta 9a, da cui segue che $f_x = 0$ se $y = -x^3$ e quindi che $f_y = 0$ se $-x^9 + x = 0$, ossia se $x(x^8 - 1) = 0$. Segue che deve essere $x = 0$ e $y = 0$, oppure $x = \pm 1$ e $y = \mp 1$. Riassumendo, $\{\nabla f = 0\} = \{(0,0),\ (\pm 1, \mp 1)\}$.

Passando alle derivate seconde otteniamo: $f_{xx} = 12x^2$, $f_{xy} = f_{yx} = 4$ e $f_{yy} = 12y^2$. Ricordando che $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 4 \\ 4 & 12y^2 \end{pmatrix}$, segue $\det H_f(x,y) = 144x^2y^2 - 16$.

Ora, relativamente ai punti critici suddetti, è facile stabilire che $\det H_f(0,0) = -16 < 0$, e dunque $(0,0)$ è un punto di sella.

Circa i punti critici $(\pm 1, \mp 1)$, è immediato stabilire che $\det H_f(\pm 1, \mp 1) = 144 - 16 = 128 > 0$, e dunque ora si deve valutare il segno di f_{xx}: da $f_{xx}(\pm 1, \mp 1) = 12 > 0$ segue che $(\pm 1, \mp 1)$ sono punti di minimo.

10. Date la regione limitata $D \subseteq \mathbb{R}^3$ delimitata dalle superficie $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{z = 0\}$ e $\{x+y+z = 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = z$,

    (a) si disegni D; (1 punto)

    (b) si calcoli l'integrale di volume $\iiint_D f dV$. (4 punti)

Soluzione

Dopo aver studiato la situazione, si conclude che la sequenza di integrali più economica è

$$\iiint_D f dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\, dzdydx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[z^2\right]_0^{1-x-y} dydx =$$
$$\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy\, dydx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y + yx^2 + y^3/3 - 2xy - y^2 + xy^2\right]_0^{1-x} dx =$$
$$\frac{1}{2} \int_0^1 1/3 - x + x^2 - x^3/3\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x)^3\, dx = -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{4}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

Il disegno viene lasciato come esercizio ai lettori.

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{2}$

(10 punti + 4 punti bonus)

11. Sia f la funzione dell'esercizio 9.

    (a) Si dica se f è limitata o meno; (1 punto)

    (b) si determini l'equazione del piano tangente nel punto $(1,0)$; (2 punti)

    (c) si calcoli la derivata direzionale in $(1,0)$ rispetto al versore definito da $\mathbf{v} = (1,1)$.

    (2 punti)

Soluzione

(a) Ponendo $\tilde{f}(x) = f(x,0) = x^4$, si conclude immediatamente che $\lim_{x\to\pm\infty} \tilde{f}(x) = +\infty$, e dunque $\tilde{f}$, e in particolare f stessa, sono illimitate.

(b) Inoltre, sfruttando il calcolo delle derivate parziali dalla soluzione dell'eserczio 9 e ricordando la teoria, sappiamo che il piano tangente $\mathscr{T}_{f,(1,0)}$ cercato è dato dalla formula $\mathscr{T}_{f,(1,0)} = \{f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)(y-0) - (z - f(1,0)) = 0\} = \{4(x-1) + 4y - (z-1)\} = \{4x + 4y - z = 3\}$.

(c) Infine, scriviamo il versore $\mathbf{u}$ associato al vettore $(1,1)$: $\mathbf{u} = \dfrac{(1,1)}{|(1,1)|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Ora, essendo f polinomiale e quindi certamente differenziabile, la derivata direzionale cercata è data dalla formula: $D_{\mathbf{u}}f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \mathbf{u} = (4,4) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

12. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r}: [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\vec{i} + (t/\sqrt{2})\vec{j} + (\sqrt{t^3}/3)\vec{k}$.

    (a) Si verifichi che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0,2])$ è regolare; (2 punti)

    (b) si calcoli la lunghezza d'arco $s(t)$; (3 punti)

    (c) si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$. (1 punti)

Soluzione

(a) La derivata prima di $\vec{r}$ vale $\vec{r}\,' = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\vec{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \dfrac{\sqrt{t}}{2}\vec{k} \neq \vec{0}$ per ogni $t \in [0,2]$, e dunque $\mathscr{R}$ è regolare.

(b) Ora, $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1/4t + 1/2 + t/4} = \sqrt{(1 + 2t + t^2)/4t} = \sqrt{(1+t)^2/4t} = (1+t)/2\sqrt{t}$, e dunque vale che la lunghezza d'arco è data da $s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(u)|\,du = \int_0^t (1+u)/2\sqrt{u}\,du = [\sqrt{u} + \sqrt{u^3}/3]_0^t = \sqrt{t} + \sqrt{t^3}/3 = \sqrt{t}(1 + t/3)$.

(c) In particolare $L(\mathscr{R}) = s(2) = \sqrt{2}(1 + 2/3) = 5\sqrt{2}/3$.

13. Si determini il piano osculatore alla curva $\mathscr{R}$ nel punto $P = \vec{r}(1) \in \mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $\mathscr{R}$ è come nell'esercizio 12 (si usi il parametro t e non la lunghezza d'arco). (5 punti)

Soluzione

Sfruttando il calcolo della soluzione dell'esercizio 12 e dalla definizione di tengente si ha che
$\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dfrac{1}{1+t}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2t}}{1+t}\vec{j} + \dfrac{t}{1+t}\vec{k}$, quindi $\vec{T}(1) = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \dfrac{1}{2}\vec{k}$.
Inoltre, $\vec{T}\,'(t) = -\dfrac{1}{(1+t)^2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{2}t - \sqrt{2}t}{(1+t)^2}\vec{j} + \dfrac{1+t-t}{(1+t)^2}\vec{k} = -\dfrac{1}{(1+t)^2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2}}{(1+t)^2}\vec{j} + \dfrac{1}{(1+t)^2}\vec{k}$,
quindi $\vec{T}\,'(1) = \dfrac{1}{4}(-\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k})$, $|\vec{T}\,'(1)| = 1/2$ e $\vec{N}(1) = \dfrac{\vec{T}\,'(1)}{|\vec{T}\,'(1)|} = \dfrac{1}{2}(-\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k})$.

Ora segue che $\vec{B}(1) = \vec{T}(1) \times \vec{N}(1) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}.$

Siccome il piano osculatore richiesto contiene il punto $P = \vec{r}(1) = (1, 1/\sqrt{2}, 1/3)$, l'equazione cercata è

$$\mathscr{O}_{\vec{r},P} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ -\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(z - \frac{1}{3}\right) = 0 \right\} =$$

$$\left\{ -y/2 + \sqrt{2}z/2 + \left(1/2\sqrt{2} - 1/3\sqrt{2}\right) = 0 \right\} =$$

$$\left\{ -y/2 + \sqrt{2}z/2 + 1/6\sqrt{2} = 0 \right\} =$$

$$\left\{ 3\sqrt{2}y - 3z - 1 = 0 \right\}.$$