Soluzioni Esame Scritto Matematica - Laurea in Scienze dell'architettura

Università degli Studi di Udine - 10 febbraio 2010

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$ MATEMATICA 1 $\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{1}$ o i moduli $\boxed{1+2}$

(20 punti + 2 punti bonus)

1. È data la funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$. Disegnare il grafico di f, determinando in particolare il dominio $D(f)$ di definizione di f, eventuali simmetrie, i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti, eventuali punti di massimo e/o minimo locale/assoluto, crescenza/decrescenza, convessità/concavità. (9 punti)

Soluzione

Dominio e segno: $x^2 + 2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}, \ f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Parità: $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+2} = \frac{1}{x^2+2} = f(x)$. Quindi f è pari

Limiti agli estremi: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (limite del tipo $1/\pm\infty$), quindi $\{y = 0\}$ (l'asse delle x) è un asintoto orizzontale.

Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$, quindi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$ e dunque $f \nearrow$ (cresce) in $\{x < 0\}$, $f \searrow$ (decresce) in $\{x > 0\}$ e l'unico punto critico e di massimo assoluto è in $x = 0$, ove $f(0) = 1/3$. f non ammette minimi né locali né assoluti.

Derivata seconda: $f''(x) = -\dfrac{2(x^2+2)^2 - 2x \cdot 2 \cdot 2x(x^2+2)}{(x^2+2)^4} =$
$-\dfrac{2(x^2+2)((x^2+2) - 4x^2)}{(x^2+2)^4} = -\dfrac{2(2-3x^2)}{(x^2+2)^3}$, e dunque $f''(x) > 0$ se $2 - 3x^2 < 0$, ossia

se $x < -\sqrt{2/3} \vee x > \sqrt{2/3}$, mentre $f''(x) < 0$ se $2 - 3x^2 > 0$, ossia se $-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}$. Dunque $f \smile$ (è convessa) in $\{x < -\sqrt{2/3} \vee x > \sqrt{2/3}\}$ e $f \frown$ (è concava) in $\{-\sqrt{2/3} < x < \sqrt{2/3}\}$.

Il disegno è ora lasciato agli studenti.

2. Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ si studi $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha}$. (6 punti)

Soluzione

Si osserva innanzitutto che il limite si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, in particolare il denominatore deve essere divisibile per $(x-1)$, ed infatti vale $x^2 + (\alpha-1)x - \alpha = (x-1)(x+\alpha)$. Ponendo ora $t = (x-1)$ il limite dato si riscrive come $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t(t+1+\alpha)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}\dfrac{1}{(t+1+\alpha)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{(t+1+\alpha)}$, questo grazie al limite notevole $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$. Ora basta osservare che se $\alpha \neq -1$ si ottiene $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{(t+1+\alpha)} = \dfrac{1}{(1+\alpha)}$, mentre se $\alpha = -1$ si vede facilmente che $\lim\limits_{t\to 0^\pm} \dfrac{1}{(t+1+\alpha)} = \pm\infty$, e dunque in quest'ultimo caso il limite non esiste.

3. Si dimostri che la funzione $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f = \begin{cases} e^x - 1 \text{ se } x < 0 \\ x^\pi \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$ è integrabile e quindi si calcoli l'integrale definito

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx. \qquad \text{(3 punti)}$$

Soluzione

Nei due tratti separati $[-2,0]$ e $[0,2]$ le funzioni sono continue e quindi ivi integrabili. Ciò in realtà basterebbe ai fini dell'integrabilità, ad ogni modo la funzione è continua anche in $x = 0$ in quanto vale $\lim\limits_{t\to 0^-} e^x - 1 = \lim\limits_{t \to 0^+} x^\pi = 0$.

Ora vale $\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{0} e^x - 1dx + \int_{0}^{2} x^\pi dx = [e^x - x]_{-2}^{0} + [x^{\pi+1}/(\pi+1)]_0^2 = 1 - e^{-2} - 2 + 2^{\pi+1}/(\pi+1)$.

4. Si calcoli l'integrale indefinito $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$. (4 punti)

Soluzione

Tra i vari possibili cambi di variabile, si pone ad esempio $t = 2x$, da cui $dt = 2xdx$. Ora, $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}2xdx = \int \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1+t}}dt$. Quindi, dopo aver notato che $\displaystyle\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+t}} = \frac{d\sqrt{1+t}}{dt}$, si procede per parti: $\displaystyle\int \frac{1}{2}\frac{t}{\sqrt{1+t}}dt = t\sqrt{1+t} - \int \sqrt{1+t}dt = t\sqrt{1+t} - \frac{2}{3}(1+t)^{3/2} = \frac{\sqrt{1+t}}{3}(3t - 2(1+t)) = \frac{\sqrt{1+t}}{3}(t-2) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{3}(x^2-2)$.

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{1}$ (10 punti)

5. Si determini l'equazione della tangente al grafico della funzione dell'esercizio 1 nel punto $(2, f(2))$. (2 punti)

Soluzione

Innanzitutto vale $(2, f(2)) = (2, 1/6) = P \in \mathscr{G}(f)$ e $f'(2) = -1/9$ (si veda la soluzione all'esercizio 1). Ora, l'equazione della retta tangente al punto P è data da $(y - f(2)) = f'(2)(x-2)$, ossia $y = -x/9 + (2/9 - 1/6)$, o ancora $y = -x/9 + 1/18$.

6. Si dimostri che la funzione $f(x) = e^x + x$ ammette uno zero e se ne calcoli uno con un errore inferiore a 2^{-2}. (4 punti)

Soluzione

Si osserva che vale $\lim_{t\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ e che la funzione è continua, dunque uno zero per essa esiste.

Inoltre $f(-1) = e^{-1} - 1 = 1/e - 1 < 0$, mentre $f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0$, dunque un punto x cercato appartiene all'intervallo $I_0 =]-1, 0[$. Dopo aver notato che da $0 < e < 4$ segue $e^{1/2} < 4^{1/2} = 2$ e quindi $1/e^{1/2} > 1/2$, si conclude che valutando f nel punto medio di

I_0 otteniamo $f(-1/2) = e^{-1/2} - 1/2 = 1/e^{1/2} - 1/2 > 0$. Dunque il punto x cercato appartiene all'intervallo $I_1 =]-1, -1/2[$.

Di nuovo, si tratta ora di valutare f in $x = -3/4$, ossia nel punto medio di I_1: da $e > 8/3 = 2,\overline{6}$ segue $e^{3/4} > (8/3)^{3/4} = \sqrt[4]{8^3/3^3} = \sqrt[4]{512/27} > \sqrt[4]{512/32} = \sqrt[4]{16} = 2 > 4/3$, da cui $1/e^{3/4} < 3/4$ e quindi $f(-3/4) = e^{-3/4} - 3/4 = 1/e^{3/4} - 3/4 < 0$. Si conclude che il punto medio di $I_2 =]-3/4, -1/2[$, ossia $-5/8$, approssima lo zero cercato con un errore minore di $|-3/4 - (-1/2)| = 1/4 = 2^{-2}$.

7. Si scriva il polinomio di Taylor di grado 3 della funzione dell'esercizio 6 centrato in $x = 1$. (4 punti)

Soluzione

Dopo aver ricordato che il polinomio di Taylor cercato è dato da $\displaystyle\sum_{i=0}^{3} \frac{1}{i!} f^{(i)}(1)(x-1)^i$, resta solo da valutare le derivate i−esime di f in 1 fino ad $i = 3$: $f(1) = e - 1$; $f'(x) = e^x - 1$ e dunque $f'(1) = e - 1$; infine, tutte le derivate successive valgono e^x e quindi $f''(1) = f'''(1) = e$. Dunque $T_{f,3,1} = (e-1) + (e-1)(x-1) + \dfrac{e}{2}(x-1)^2 + \dfrac{e}{6}(x-1)^3$. Eventualmente, si possono sviluppare le potenze del binomio $(x-1)$ così da ottenere un polinomio in forma ridotta.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆ **MATEMATICA 2** ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Parte comune a chi affronta solo il modulo $\boxed{2}$ o i moduli $\boxed{1+2}$

(10 punti + 2 punti bonus)

8. È data la funzione a valori vettoriali $\vec{r} : [0,2] \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = (2+2t)\vec{\imath} + \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}t^2\right)\vec{\jmath} + \left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{t^3}\right)\vec{k}$. Dopo aver verificato che la curva $\mathscr{R} = \vec{r}([0,2])$ è regolare, si calcoli la

lunghezza d'arco $s(t)$, si calcoli la lunghezza di $\mathscr{R}$ e si esprima il parametro t in funzione di s (ossia, si inverta la funzione s). (4 punti)

Soluzione

La derivata prima di $\vec{r}$ vale $\vec{r}\,' = 2\vec{i} + t\vec{j} + 2\sqrt{t}\vec{k} \neq \vec{0}$ per ogni $t \in [0, 2]$, e dunque $\mathscr{R}$ è regolare.

Poi, $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{4 + 4t + t^2} = \sqrt{(2 + t)^2} = 2 + t$ (si ricordi che $t \geq 0$), e dunque vale che la lunghezza d'arco è data da $s(t) = \int_0^t |\vec{r}\,'(u)|du = \int_0^t 2+udu = [2u+u^2/2]_0^t = 2t+t^2/2$. In particolare $L(\mathscr{R}) = s(2) = 2 \cdot 2 + 2^2/2 = 6$.

Infine, si cerca t in funzione della lunghezza d'arco s: da $s(t) = s = 2t + t^2/2$ si ottiene $t^2/2+2t-s = 0$ che dà come soluzioni nella variabile t le seguenti: $t_{1,2} = -2\pm\sqrt{4 + 2s}$, delle quali solo la $t(s) = -2 + \sqrt{4 + 2s}$ è accettabile.

9. Date la regione limitata $D \subseteq \mathbb{R}^3$ delimitata dalle superficie $\{z = 0\}$, $\{y = 0\}$, $\{y = 1 - x^2\}$ e $\{z + y = 1\}$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z$, si disegni D e si calcoli l'integrale di volume $\iiint_D f dV$. (5 punti)

Soluzione

Dopo aver studiato la situazione, si conclude che la sequenza di integrali più economica è $\displaystyle\iiint_D f dV = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-y} zdzdydx = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-y} dydx =$
$\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \frac{(1-y)^2}{2} dydx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left[y - y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x^2} dx =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left[(1-x^2) - (1-x^2)^2 + \frac{(1-x^2)^3}{3}\right] dx =$
$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-1}^1 1-x^2-1+2x^2-x^4+\frac{1}{3}-x^2+x^4-\frac{x^6}{3}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{3}-\frac{x^6}{3}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{x^7}{7}\right)\right]_{-1}^1 =$
$\displaystyle\frac{1}{6}\left[x - \frac{x^7}{7}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{7} + 1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{2}{7}.$

Il disegno viene lasciato come esercizio ai lettori per mancanza di tempo.

10. Siano $P = (2, -3, 5) \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{k}$, $R_1 = \{P + k\vec{v},\ k \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ e $R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 2x + y = x - 3z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Determinare la distanza $d(R_1, R_2)$ tra le rette date e specificare se R_1 e R_2 sono sghembe, parallele o incidenti. (3 punti)

Soluzione

Sia $Q \in R_1$, allora $\exists k \in \mathbb{R}$ tale che $Q = (2 + k, -3, 5 + k)$. Ora $Q \in R_2$ se soddisfa $2x_Q + y_Q = x_Q - 3z_Q = 0$, ossia se $2(2+k) - 3 = 0 \wedge (2+k) - 3(5+k) = 0$. Ciò conduce a $2k = -1 \wedge 2k = -13$, il che non è mai verificato, e dunque Q non può appartenere a R_2, il che significa che $R_1 \cap R_2 = \emptyset$.

Riscriviamo ora R_2 in forma parametrica: le 2 equazioni date porgono $y = -2x$ e $z = x/3$, e dunque $R_2 = \{(x, y, z) = (x, -2x, x/3) \in \mathbb{R}^3\} = \{k(1, -2, 1/3),\ k \in \mathbb{R}\}$. Dopo aver posto $\vec{w} = (1, -2, 1/3)$ si ha $R_2 = \{k\vec{w},\ k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

Calcoliamo ora un vettore $\vec{u}$ tale che $\vec{u} \perp \vec{v}$ e $\vec{u} \perp \vec{w}$:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{k} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1/3 \end{pmatrix} = (2, 2/3, -2).$$ Utilizziamo per comodità $\vec{u} = (3, 1, -3)$.

Si noti che da $\vec{v} \times \vec{w} \neq \vec{0}$ e da $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ possiamo affermare che le due rette in questione sono sghembe.

Infine, visto che $O = (0, 0, 0) = 0\vec{w} \in \mathbb{R}_2$, abbiamo che $\vec{OP} = (2, -3, 5)$ e quindi

$$d(R_1, R_2) = \frac{|\vec{OP} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|(2, -3, 5) \cdot (3, 1, -3)|}{\sqrt{3^2 + 1 + (-3)^2}} = \frac{|6 - 3 - 15|}{\sqrt{19}} = \frac{12}{\sqrt{19}}$$

Parte aggiuntiva per chi affronta <u>solo</u> il modulo $\boxed{2}$

(10 punti + 2 punti bonus)

11. Si determini il piano osculatore alla curva $\mathscr{R}$ nel punto $P = \vec{r}(1) \in \mathscr{R} \subseteq \mathbb{R}^3$, dove $\mathscr{R}$ è come nell'esercizio 8 (si usi il parametro t e non la lunghezza d'arco). (5 punti)

Soluzione

Dalla definizione si ha che $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|} = \dfrac{2}{2+t}\vec{i} + \dfrac{t}{2+t}\vec{j} + \dfrac{2\sqrt{t}}{2+t}\vec{k}$, quindi $\vec{T}(1) = \dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{1}{3}\vec{j} + \dfrac{2}{3}\vec{k}$.

Inoltre $\vec{T}\,'(t) = -\dfrac{2}{(2+t)^2}\vec{i} + \dfrac{2+t-t}{(2+t)^2}\vec{j} + \dfrac{(2+t)/\sqrt{t} - 2\sqrt{t}}{(2+t)^2}\vec{k} = \dfrac{1}{(2+t)^2}\left(-2\vec{i} + 2\vec{j} + \dfrac{2-t}{\sqrt{t}}\vec{k}\right)$, quindi $\vec{T}\,'(1) = \dfrac{1}{9}(-2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k})$,
$|\vec{T}\,'(1)| = \dfrac{1}{9}\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1} = 3/9 = 1/3$ e $\vec{N}(1) = \dfrac{\vec{T}\,'(1)}{|\vec{T}\,'(1)|} = -\dfrac{2}{3}\vec{i} + \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{1}{3}\vec{k}$.

Ora segue che $\vec{B}(1) = \vec{T}(1) \times \vec{N}(1) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{k} & \vec{k} \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = -\dfrac{1}{3}\vec{i} - \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{2}{3}\vec{k}$.

Siccome il piano osculatore richiesto contiene il punto $P = \vec{r}(1) = (4, 4, 1/3)$, l'equazione cercata è $\mathscr{O}_{\vec{r},P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ -\frac{1}{3}(x-4) + -\frac{2}{3}(y-4) + \frac{2}{3}(z - \frac{1}{3}) = 0\} = \{3x - 12 + 6y - 24 - 6z + 2 = 0\} = \{3x + 6y - 6z - 34 = 0\}$.

12. Sono date la regione $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x| + |y| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ e la funzione $f : D \to \mathbb{R},\ f(x,y) = e^{xy}$. Si disegni D e si calcolino i punti critici interni a D, si dica di che tipo sono e si calcolino i massimi e minimi assoluti di f nel dominio D. (7 punti)

Soluzione

Si nota che il dominio D è dato dal quadrato simmetrico rispetto all'origine del piano xy con i vertici in $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$. Siccome f è differenziabile, cerchiamo i punti critici all'interno di D servendoci delle derivate parziali: $f_x = ye^{xy},\ f_y = xe^{xy},\ f_{xx} = y^2 e^{xy},\ f_{xy} = f_{yx} = e^{xy} + xye^{xy} = (1+xy)e^{xy}$ e $f_{yy} = x^2 e^{xy}$. Dunque $\vec{\nabla}(f) = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0$, punto nel quale vale $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ e dunque $(0,0)$ è un punto di sella.

Osserviamo ora che il bordo di D è dato da $\partial D = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$, dove R_i è il segmento del i-esimo quadrante passante per 2 opportuni punti tra i vertici suddetti. Relativamente a R_1 vale che $R_1 = \vec{r_1}([0,1])$, con $\vec{r_1}(t) = t\vec{i} + (1-t)\vec{j}$. Per cui la restrizione di f a R_1 è data da $f|_{R_1}(t) = f_1(t) = e^{t(1-t)} = e^{t^2-t}$, con derivata prima $f_1'(t) = (1-2t)e^{t^2-t}$, che si annulla in $t = 1/2$, dove $f_1(1/2) = f(1/2,1/2) = e^{1/4} = \sqrt[4]{e}$. Similmente si trovano i punti critici di R_i per $i = 2,3,4$, rispettivamente $(-1/2,1/2)$, $(-1/2,-1/2)$, $(1/2,-1/2)$, e ivi si valuta f, che assume i valori $e^{\pm 1/4}$. Infine si valuta f nei vertici del quadrato ∂D, dove f vale $e^0 = 1$. Quindi i massimi assoluti sono in $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ dove f vale $\sqrt[4]{e}$ e i minimi assoluti sono in $(\pm 1/2, \mp 1/2)$ dove f vale $1/\sqrt[4]{e}$.